Zur elektromagnetischen Strahlung magnetfeldfreier Elektronenplasmawellen bei isotropem und anisotropem Gasdruck

R. BESSENRODT *

Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Hannover

(Z. Naturforsch. **24 a**, 311—318 [1969]; eingegangen am 4. April 1968)

In previous studies the electromagnetic radiation resulting from nonlinear self-interaction of electron plasma waves was treated by taking the electron pressure to be isotropic. Here we determine the radiation flux in the far field of the disturbance for the anisotropic case, too. By assuming statistical homogeneity in space and time and accounting only for pair correlations of the particle density the mean flux near the second harmonic of the plasma frequency can be expressed by the energy spectrum of the primary waves. As an application we find approximate formulae for coronal conditions (type II and III bursts). The anisotropy corrections are of the order $(a/c)^2$ (a=electron sound velocity, c=velocity of light).

1. Problemstellung, Voraussetzungen

Wegen ihrer vielfältigen terrestrischen und astrophysikalischen Bedeutung ist die Frage der Umsetzung von Plasmawellenenergie in elektromagnetische Strahlung in den vergangenen Jahren mehrfach behandelt worden [1–4]; dabei wurde der Gasdruck als isotrop vorausgesetzt. Nun ist jedoch in den für die Anwendung ins Auge gefaßten verdünnten, sehr heißen Plasmen wie der Sonnenkorona (Teilchendichte $< 10^9\ \mathrm{cm}^{-3}$, Temperatur $\simeq 10^6\ {}^\circ\mathrm{K}$) die Stoßzahl der Elektronen selbst gegen die Ionenplasmafrequenz sehr klein, so daß der Drucktensor bei Störungen des Gleichgewichts nicht isotrop bleiben kann (siehe z. B. [5]). Im folgenden soll der dadurch bewirkte Zusatzterm für den auf der Selbstwechselwirkung der Elektronenwellen beruhenden nichtlinearen Abstrahlungsmechanismus bestimmt werden, und zwar speziell für den mittleren Strahlungsstrom im Fernfeld. Ist a die Elektronenschall-, c die Lichtgeschwindigkeit, so wird sich seine Größenordnung zu $(a/c)^2$ ergeben; im Fall der Radiofrequenzstrahlung der gestörten Sonne ist also die Annahme isotropen Drucks in guter Näherung gerechtfertigt.

Zugrunde gelegt sei ein vollständig ionisiertes, stoß- und feldfreies, unendlich ausgedehntes Wasserstoffplasma, das sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet und dessen Ionen einen gleichmäßig dispergierten, unbeweglichen, nur die mittlere Elektronenladung kompensierenden Hintergrund bilden. In einem solchen Plasma sind die Plasma- und die elektromagnetischen Wellen in *linearer* Näherung voneinander unabhängig; deshalb werden wir uns im folgenden auf die *quadratische* Näherung der Grundgleichungen konzentrieren, und zwar speziell auf die Wechselwirkung der *Elektronenplasmawellen untereinander*. Dadurch kann natürlich nur die Abstrahlung bei der *doppelten* Plasmafrequenz erfaßt werden; auf die Emission bei der einfachen Plasmafrequenz gehen wir hier nicht ein (dazu und zu anderen Mechanismen siehe [6–22]). Der

* Neue Anschrift: Institut für Theoretische Physik, Lehrstuhl B, Technische Hochschule Aachen.

[1] G. BURKHARDT, CH. FAHL u. R. W. LARENZ, Z. Phys. **161**, 380 [1961].
[2] R. W. LARENZ, Sympos. on Electromagnetic Theory and Antennas, Kopenhagen, 25.—30. Juni 1962, p. 349, Pergamon Press, New York 1963.
[3] A. BIRKHOLZ, Dissertation, TH Hannover 1967, Z. Naturforsch. (in Vorbereitung).
[4] D. BEERMANN, Dissertation, TH Hannover 1967, Z. Naturforsch. (in Vorbereitung).
[5] I. B. BERNSTEIN u. S. K. TREHAN, Nucl. Fus. **1**, 3 [1960].
[6] V. L. GINZBURG u. V. V. ZHELEZNIAKOV, Sov. Astron. AJ. **2**, 653 [1958].
[7] D. A. TIDMAN, Phys. Rev. **117**, 366 [1960].
[8] V. L. GINZBURG, Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma, Gordon & Breach, New York 1961.
[9] M. H. COHEN, Phys. Rev. (2) **123**, 711 [1961].
[10] P. A. STURROCK, J. Nucl. Energy Pt. C **2**, 158 [1961].
[11] D. A. TIDMAN u. G. H. WEISS, Phys. Fluids **4**, 703 [1961].
[12] D. A. TIDMAN u. G. H. WEISS, Phys. Fluids **4**, 866 [1961].
[13] M. H. COHEN, Phys. Rev. **126**, 389 [1962].
[14] M. H. COHEN, J. Geophys. Res. **67**, 2729 [1962].
[15] P. A. STURROCK, Proc. Internat. School of Physics “Enrico Fermi”, Course XXV: Advanced Plasma Theory, p. 180, Acad. Press, New York 1964.
[16] R. E. AAMODT u. W. E. DRUMMOND, J. Nucl. Energy Pt. C **6**, 147 [1964].
[17] P. A. STURROCK, R. H. BALL u. D. E. BALDWIN, Phys. Fluids **8**, 1509 [1965].
[18] T. BIRMINGHAM, J. DAWSON u. C. OBERMAN, Phys. Fluids **8**, 297 [1965].
[19] D. A. TIDMAN u. T. H. DUPREE, Phys. Fluids **8**, 1860 [1965].
[20] B. B. KADOMTSEV, Plasma Turbulence, Acad. Press, London—New York 1965.
[21] R. WAGNER, Z. Naturforsch. **22 a**, 1372 [1967].
[22] R. WAGNER, Z. Naturforsch. **22 a**, 1586 [1967].

betrachtete Störungsherd überthermischer Plasmaschwingungen sei auf das Volumen V beschränkt, dessen lineare Abmessungen groß gegen die Korrelationslänge der Schwingungen seien. Gesucht ist vor allem der über eine Schar solcher Störherde gemittelte Strahlungsstrom $\langle \mathfrak{S} \rangle$.

2. Die Ausgangsgleichungen bei isotropem und anisotropem Druck

Die Fälle isotropen bzw. anisotropen Drucks unterscheiden sich durch die Art des Abbrechens des (unendlichen) Systems von Momentengleichungen, das man wie üblich (s. z. B. [23]) aus der stoßfreien Boltzmann-Vlasov-Gleichung gewinnt.

Im Fall isotropen Drucks wird die dritte Momentengleichung durch die Polytropenbeziehung $p \sim n^\gamma$ ersetzt. Damit sich für lange Wellen dieselbe Dispersionsbeziehung wie bei anisotropem Druck ergibt, benutzen wir darin $\gamma = 3$.

Im Fall anisotropen Drucks muß die dritte Momentengleichung (die die zeitliche Änderung des Drucktensors regelt) mitgeführt werden. In ihr wird aber die Divergenz des höchsten auftretenden Moments, des Wärmeflußtensors 3. Stufe, im Sinne einer verallgemeinerten Adiabasieforderung näherungsweise vernachlässigt.

Zu diesen Gleichungssätzen nehmen wir noch die Maxwell-Gleichungen hinzu und ziehen jeweils ein linearisiertes und ein System 2. Ordnung heraus; dabei sollen in letzterem die Produkte aus Ausdrücken 1. Ordnung als Quellterme angesehen werden.

Der Ausgangszustand sei ein strömungs- und feldfreies thermodynamisches Gleichgewicht, und im Falle einer Störung mögen in der 1. Ordnung nur Plasmaschwingungen vorliegen (deren Magnetfeld verschwindet).

Unterscheidet man die Größen verschiedener Ordnung durch obere Indizes, so erhält man bei isotropem Druck als System 1. Ordnung s^1:

$$\dot{n}^1 + \nabla \cdot \mathfrak{v}^1 = 0\,, \tag{1}$$

$$\dot{\mathfrak{v}}^1 + \mathfrak{E}^1 + \nabla p^1 = 0\,, \tag{2}$$

$$p^1 - \lambda\, n^1 = 0 \qquad \text{mit} \qquad \lambda \equiv \gamma\, p^0, \tag{3}$$

$$\dot{\mathfrak{E}}^1 - \mathfrak{v}^1 = 0\,, \tag{4}$$

$$\nabla \times \mathfrak{E}^1 = 0\,, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \mathfrak{E}^1 + n^1 = 0\,. \tag{6}$$

Aus den Gln. (4) und (5) folgt

$$\nabla \times \mathfrak{v}^1 = 0\,. \tag{7}$$

Für das System 2. Ordnung s^2 ergibt sich

$$\dot{n}^2 + \nabla \cdot \mathfrak{v}^2 = -\nabla \cdot (n^1\, \mathfrak{v}^1)\,, \tag{8}$$

$$\dot{\mathfrak{v}}^2 + \mathfrak{E}^2 + \nabla p^2 = \tfrac{1}{2} \nabla [\lambda (n^1)^2 - (\mathfrak{v}^1)^2]\,, \tag{9}$$

$$p^2 - \lambda\, n^2 = \lambda (n^1)^2, \tag{10}$$

$$\nabla \times \mathfrak{H}^2 - \dot{\mathfrak{E}}^2 + \mathfrak{v}^2 = -n^1\, \mathfrak{v}^1, \tag{11}$$

$$\nabla \times \mathfrak{E}^2 + \dot{\mathfrak{H}}^2 = 0\,, \tag{12}$$

$$\nabla \cdot \mathfrak{H}^2 = 0\,, \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \mathfrak{E}^2 + n^2 = 0\,. \tag{14}$$

Im Falle anisotropen Drucks hat man lediglich die Gln. (2) und (3) durch

$$\dot{\mathfrak{v}}^1 + \mathfrak{E}^1 + \nabla \cdot \boldsymbol{P}^1 = 0 \tag{15}$$

und
$$\dot{\boldsymbol{P}}^1 + P^0 (\nabla \cdot \mathfrak{v}^1)\, \boldsymbol{I} + 2\, P^0\, \overline{\nabla \mathfrak{v}^1} = 0 \tag{16}$$

bzw. (9) und (10) durch

$$\dot{\mathfrak{v}}^2 + \mathfrak{E}^2 + \nabla \cdot \boldsymbol{P}^2 = n^1\, \nabla \cdot \boldsymbol{P}^1 - \tfrac{1}{2} \nabla (\mathfrak{v}^1)^2 \tag{17}$$

und
$$\dot{\boldsymbol{P}}^2 + P^0 (\nabla \cdot \mathfrak{v}^2)\, \boldsymbol{I} + 2\, P^0\, \overline{\nabla \mathfrak{v}^2} = -\nabla \cdot (\mathfrak{v}^1\, \boldsymbol{P}^1) \;\; - 2\, \overline{\boldsymbol{P}^1 \cdot \nabla \mathfrak{v}^1} \tag{18}$$

zu ersetzen. In diesen Gleichungen sind alle Größen, da uns die Abstrahlung interessiert, auf die für das elektromagnetische Strahlungsfeld charakteristischen Größen bezogen, also (in der üblichen Bezeichnungsweise)

$\mathfrak{r}$	t	$\mathfrak{v},\, a \equiv \sqrt{\gamma\, \frac{k_\mathrm{B}\, T}{m}}$	n	$p,\, \boldsymbol{P}$	$\mathfrak{E},\, \mathfrak{H}$

auf

c/ω_p	$1/\omega_\mathrm{p}$	c	n^0	$m\, n^0\, c^2$	$\frac{m}{e}\, c\, \omega_\mathrm{p}$

mit der Elektronenplasmafrequenz

$$\omega_\mathrm{p} \equiv \sqrt{\frac{4\, \pi\, n^0\, e^2}{m}}\;;$$

$\overline{\boldsymbol{T}}$ ist der symmetrische Anteil des Tensors $\boldsymbol{T}$.

3. Abstrahlung bei isotropem Druck

3.1. Der asymptotische Strahlungsstrom bei statistischer Homogenität des Quellterms

Die wichtigsten Schritte sollen zunächst am einfacheren Fall isotropen Drucks betrachtet werden;

[23] J. M. Burgers, Rev. Mod. Phys. **32**, 868 [1960].

bei der Erweiterung auf den anisotropen Fall können wir uns dann auf die neuen Punkte konzentrieren.

Zunächst leiten wir die Wellengleichung für das Magnetfeld ab, um den Quellterm 2. Ordnung und die asymptotischen Greenschen Funktionen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zu finden. Man erhält:

$$\ddot{\mathfrak{H}} + \mathfrak{H} - \Delta \mathfrak{H} = \mathfrak{Q} \tag{19}$$

mit
$$\mathfrak{Q} \equiv -\nabla \times (n^1 \mathfrak{v}^1) = \mathfrak{v}^1 \times \nabla n^1 \tag{20}$$

(wobei der Index 2 fortan wieder unterdrückt sei). Dieser Quellterm, die Rotation des von außen eingeprägten Stromes $-n^1 \mathfrak{v}^1$, verschwindet nicht identisch, weil $\mathfrak{v}^1$ außer durch ∇n^1 auch durch die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}^1$ bestimmt wird, die i. allg. nicht in Richtung des Dichtegradienten weist. Führt man in Gl. (19) die zeitlichen Fourier-Transformierten von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{Q}$ ein, so erhält man eine Helmholtz-Gleichung. Da wir den Strahlungsstrom nur im Fernfeld benötigen, brauchen wir deren asymptotische Greensche Funktion, die transversal ist und der Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen genügt. Damit gilt dann:

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{r}, \omega) = 2\pi \int \mathrm{d}\mathfrak{r}' \, \mathfrak{G}^{\mathfrak{H}}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}', \omega) \cdot \mathfrak{Q}(\mathfrak{r}', \omega) \tag{21}$$

mit

$$\mathfrak{G}^{\mathfrak{H}}(\mathfrak{r}, \omega) \cong \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r} e^{\pm i l r} (\boldsymbol{I} - \mathbf{r}\,\mathbf{r}) \quad (\omega \gtrless 0)\,; \tag{22}$$

dabei sei $\mathbf{r}$ der Einheitsvektor in $\mathfrak{r}$-Richtung und $l^2 \equiv \omega^2 - 1$. Für das elektrische Feld erhält man aus dem Induktionsgesetz

$$\mathfrak{G}^{\mathfrak{E}}(\mathfrak{r}, \omega) \cong -\frac{|\omega|}{l} \mathbf{r} \times \mathfrak{G}^{\mathfrak{H}}(\mathfrak{r}, \omega). \tag{23}$$

Macht man die zeitliche Fourier-Transformation unter Benutzung der Greenschen Funktionen wieder rückgängig, so erhalten die Fernfelder die Gestalt:

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t) \cong -\frac{1}{8\pi^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \iiint \mathrm{d}\omega' \, \mathrm{d}\mathfrak{r}' \, \mathrm{d}t' \, \frac{|\omega'|}{l'} \mathfrak{q}(\mathfrak{r}', t') \exp\{\pm i (l' r - \mathfrak{l}' \cdot \mathfrak{r}') - i\omega'(t - t')\}, \quad \omega' \gtrless 0 \tag{24}$$

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{r}, t) \cong \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r} \iiint \mathrm{d}\omega'' \, \mathrm{d}\mathfrak{r}'' \, \mathrm{d}t'' \, \mathfrak{q}(\mathfrak{r}'', t'') \exp\{\pm i (l'' r - \mathfrak{l}'' \cdot \mathfrak{r}'') - i\omega''(t - t'')\}, \quad \omega'' \gtrless 0 \tag{25}$$

mit
$$\mathfrak{q}(\mathfrak{r}, t) \equiv (\boldsymbol{I} - \mathbf{r}\,\mathbf{r}) \cdot \mathfrak{Q}(\mathfrak{r}, t). \tag{26}$$

Daraus ergibt sich nun sofort der über eine Schar von Störherden gemittelte asymptotische Strahlungsstrom $\langle \mathfrak{S} \rangle$. Wird er auf $m\, n_0\, c^2 \cdot c$ bezogen, so gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{S} \rangle &= \langle \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \rangle \\ &\cong \frac{1}{4(2\pi)^4} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \iiiint\!\!\iint \mathrm{d}\mathfrak{r}' \, \mathrm{d}\mathfrak{r}'' \, \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}t'' \, \mathrm{d}\omega' \, \mathrm{d}\omega'' \, \frac{|\omega'|}{l'} \\ &\qquad \cdot R(\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'', t', t'') \\ &\qquad \cdot \exp\{\pm i (l' r - \mathfrak{l}' \cdot \mathfrak{r}') \pm i (l'' r - \mathfrak{l}' \cdot \mathfrak{r}'') \\ &\qquad - i [\omega'(t - t') + \omega''(t - t'')]\} \end{aligned} \tag{27}$$

mit der kontrahierten Zweier-Korrelation des Quellterms

$$R(\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'', t', t'') \equiv \langle \mathfrak{q}(\mathfrak{r}', t') \cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{r}'', t'') \rangle. \tag{28}$$

Ersichtlich kommt es im Fernfeld also nur auf diesen Korrelationsskalar (die Spur des Korrelationstensors) an.

Da nur *schwache* Abstrahlung auftritt, sollte – von den Anfachungs- und Dämpfungsmechanismen abgesehen – eine gut ausgeprägte, quasistationäre Schwingphase vorliegen. Deshalb werden wir die Quellverteilung näherungsweise als räumlich und zeitlich statistisch homogen voraussetzen dürfen. Dann ist

$$R(\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'', t', t'') = R(\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'', t' - t''), \tag{29}$$

und damit lassen sich die t''-, ω''- und $\mathfrak{r}''$-Integration im Strahlungsstrom ausführen. Man erhält

$$\langle \mathfrak{S} \rangle \cong V \frac{\mathbf{r}}{r^2} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \, I_{\mathrm{is}}(\mathbf{r}, \omega) \tag{30}$$

mit V als (dimensionslosem) Volumen des Störherdes und

$$I_{\mathrm{is}}(\mathbf{r}, \omega) \equiv \pi \frac{\omega}{l} R(\mathfrak{l}, \omega) \qquad (\mathfrak{l} \equiv l\, \mathbf{r}). \tag{31}$$

Dabei ist $I_{\mathrm{is}}(\mathbf{r}, \omega)$ die von der Volumen- in die Raumwinkeleinheit emittierte Energie pro Zeit- und Kreisfrequenzeinheit, $R(\mathfrak{k}, \omega)$ die (reelle und nicht negative) raum-zeitliche Fourier-Transformierte von $R(\mathfrak{r}, t)$.

Benutzt man weiter die vorausgesetzte statistische Homogenität, approximiert die Vierer-Korrelationen der Teilchendichte durch eine Summe von Produkten der Zweier-Korrelationen und berücksichtigt die Dispersionsbeziehung $\Omega^2 = 1 + a^2 k^2$ der primären Plasmaschwingungen, so ergibt sich für die spezielle Form des Quellterms Gl. (20) in der Umgebung der doppelten Plasmafrequenz (s. Anhang):

$$R(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2} \oint\limits_{\psi=\omega} \frac{\mathrm{d}F'}{\left|\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{k}'}\right|} \left(\frac{\Omega'}{k'^2} - \frac{\Omega^*}{k^{*2}}\right)^2 (\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}')^2 R_n(\mathfrak{k}')\, R_n(\mathfrak{k}^*). \tag{32}$$

Darin ist

$$\mathfrak{p} \equiv (\mathfrak{k}, \omega), \quad \psi \equiv \Omega' + \Omega^*, \quad \Omega' \equiv \Omega(\mathfrak{k}'),$$

$$\Omega^* \equiv \Omega(\mathfrak{k}^*), \quad \mathfrak{k}^* \equiv \mathfrak{k} - \mathfrak{k}', \; R_n(\mathfrak{k}) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, R_n(\mathfrak{k}, \omega),$$

und die Integration erstreckt sich über die Fläche $\psi = \omega$.

3.2. *Mittlerer asymptotischer Strahlungsstrom und Energiespektrum der Plasmawellen*

Ein oft anschaulicherer Ansatzpunkt als die Dichtekorrelation R_n ist das Energiespektrum $u(\mathfrak{k})$ der Plasmawellen. Es soll deshalb noch gezeigt werden (s. auch [17]), wie $I_{\text{is}}(\mathbf{r}, \omega)$ dadurch ausgedrückt werden kann.

Für die Energiedichte $u(\mathfrak{r}, t)$ der Plasmaschwingungen ergibt sich aus dem System s[1], wenn man $\mathfrak{v}^1(\mathfrak{k}, \omega)$ und $\mathfrak{E}^1(\mathfrak{k}, \omega)$ auf $n^1(\mathfrak{k}, \omega)$ zurückführt und die statistische Homogenität benutzt:

$$\langle u(\mathfrak{r}, t) \rangle = \int u(\mathfrak{k})\, \mathrm{d}\mathfrak{k}, \tag{33}$$

wobei

$$u(\mathfrak{k}) \equiv 2\, \frac{\Omega^2}{k^2} R_n(\mathfrak{k}) \tag{34}$$

als Energiespektrum der primären Plasmawellen bezeichnet sei. Damit schreibt sich

$$I_{\text{is}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\pi}{8}\, \omega\, l \oint\limits_{\psi=\omega} \frac{\mathrm{d}F}{\left|\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{k}}\right|} k^2 \sin^2 \vartheta\, \frac{k^2}{\Omega^2}\, \frac{k^{*2}}{\Omega^{*2}} \cdot \left(\frac{\Omega}{k^2} - \frac{\Omega^*}{k^{*2}}\right)^2 u(\mathfrak{k})\, u(\mathfrak{k}^*) \tag{35}$$

mit

$$\vartheta \equiv \sphericalangle(\mathfrak{k}, \mathfrak{r}), \quad \mathfrak{l} \equiv l\, \mathbf{r}, \quad \mathfrak{k}^* \equiv \mathfrak{l} - \mathfrak{k}, \quad \psi \equiv \Omega + \Omega^*.$$

Da die Frequenzen i. allg. nur wenig von $\omega = 2$ abweichen, hat man noch die Näherungsformel

$$I_{\text{is}}(\mathbf{r}, \omega) \simeq \frac{\pi}{4} \sqrt{3} \oint\limits_{\psi=\omega} \frac{\mathrm{d}F}{\left|\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{k}}\right|} k^2 \sin^2 \vartheta\, (k^{*2} - k^2)^2 \cdot u(\mathfrak{k})\, u(\mathfrak{k}^*) \tag{36}$$

mit $\mathfrak{k}^* \equiv \sqrt{3}\, \mathbf{r} - \mathfrak{k}$.

3.3. *Approximationsformeln für solare Bursts vom Typ II und III*

Das bisher wohl interessanteste Anwendungsbeispiel der entwickelten Theorie ist die Erklärung der 2. Harmonischen, die bei den Bursts vom Typ II und III der gestörten Radiofrequenzstrahlung der Sonne auftritt (s. z. B. [24]). Diese Strahlung (die durch hochenergetische Flare-Elektronen verursacht wird) entsteht im Plasma der Sonnenkorona, wobei i. allg.

die Elektronenschallgeschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist,

für die mittlere angeregte Wellenzahl $\bar{k}$ im Spektrum der Elektronenwellen $1 \ll \bar{k}^2 \ll 1/a^2$ gilt,

und die mittlere relative Abweichung von der doppelten Plasmafrequenz $\overline{\Delta\omega} \equiv \bar{\omega} - 2$ den Ungleichungen $a^2 \ll \overline{\Delta\omega} \ll 1$ genügt.

Dann findet man durch geeignete Reihenentwicklungen für die Gruppengeschwindigkeit

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{k}}\right| \simeq 2\, a \sqrt{\Delta\omega} \quad \text{mit} \quad \Delta\omega \equiv \omega - 2 \tag{37}$$

und für die Fläche $\psi = \omega$:

$$k \simeq \frac{1}{a} \sqrt{\Delta\omega} + \tfrac{1}{2} \sqrt{3} \cos \vartheta, \tag{38}$$

also näherungsweise eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}\sqrt{3}\, \mathbf{r}$ und dem Radius $\frac{1}{a}\sqrt{\Delta\omega} \gg 1$.

Damit erhält man aus Gl. (36):

$$I_{\text{is}}(\mathbf{r}, \omega) \simeq \frac{3}{8} \sqrt{3}\, \pi\, \frac{\sqrt{\Delta\omega}}{a^3} \oint \mathrm{d}\mathfrak{k} \sin^2 2\vartheta\, u\left(\frac{\sqrt{\Delta\omega}}{a} \mathfrak{k}\right) \cdot u\left(-\frac{\sqrt{\Delta\omega}}{a} \mathfrak{k}\right) \tag{39}$$

mit $\mathrm{d}\mathfrak{k}$ als Raumwinkelelement. Das Spektrum wird also lediglich für die entgegengesetzt gleichen Wellenzahlvektoren $\pm \frac{\sqrt{\Delta\omega}}{a} \mathfrak{k}$ benötigt: Zur Abstrahlung bei $\Delta\omega \gg a^2$ tragen ja gemäß der Ecclesschen Dispersionsbeziehung der ausgestrahlten Wellen nur fast entgegengesetzt gleiche primäre $\mathfrak{k}$ bei.

Führt der Anfachungsmechanismus sogar zu einem isotropen Energiespektrum, so läßt sich auch die Winkelintegration ausführen, und man hat:

$$I_{\text{is}}(\mathbf{r}, \omega) \simeq \frac{4}{5} \sqrt{3}\, \pi^2\, \frac{\sqrt{\Delta\omega}}{a^3}\, u^2\left(\frac{\sqrt{\Delta\omega}}{a}\right); \tag{40}$$

allerdings bevorzugen die meisten in Frage kommenden Anfachungsmechanismen – z. B. auslaufende Stoßfronten [25] – bestimmte Raumrichtungen.

Mit Hilfe der Gl. (39) (oder deren Varianten) kann z. B. aus der beobachteten Bandbreite der

[24] J. P. Wild, S. F. Smerd u. A. A. Weiss, Solar Bursts, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **1**, 291 [1963].

[25] J. D. Welly, Z. Naturforsch. **18 a**, 1157 [1963].

Strahlung auf die mittlere angeregte Wellenzahl $\bar{k}$ des Spektrums der Elektronenwellen zurückgeschlossen und die Konsistenz der angegebenen Voraussetzungen nachgewiesen werden, siehe [2].

4. Abstrahlung bei anisotropem Druck

4.1. Wellengleichung, asymptotische Greensche Funktionen, mittlerer Strahlungsstrom

Zur Erfassung der durch die Anisotropie des Drucktensors bewirkten zusätzlichen Abstrahlung gehen wir wie im Fall isotropen Drucks vor; dabei können wir uns jetzt aber auf die durch die Anisotropie bewirkten Komplikationen konzentrieren. Da $P^0 = a^2/3 \ll 1$ ist, wird nur die in P^0 lineare Näherung gebraucht.

Zunächst leitet man wieder eine Wellengleichung für das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ ab und identifiziert deren Quellterm. Es ergibt sich

$$\dddot{\mathfrak{H}}^2 + \dot{\mathfrak{H}}^2 - \Delta\ddot{\mathfrak{H}}^2 + P^0 \Delta(\Delta\mathfrak{H}^2 - \ddot{\mathfrak{H}}^2) = \mathfrak{Q}^2 \quad (41)$$

mit

$$\mathfrak{Q}^2 \equiv \nabla \times \Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(n^1\,\mathfrak{v}^1) + \nabla \cdot \Big(2\,P^0\,\overline{\nabla n^1\,\mathfrak{v}^1} - \nabla \cdot (\mathfrak{v}^1\,\boldsymbol{P}^1) - 2\,\overline{\boldsymbol{P}^1 \cdot \nabla \mathfrak{v}^1}\Big)\Big]. \quad (42)$$

Die asymptotischen Greenschen Funktionen lassen sich auch hier ermitteln, wenn wir $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{Q}$ zeitlich Fourier-transformieren, es wird:

$$(\omega^4 - \omega^2 + \omega^2\,\Delta + P^0\,\omega^2\,\Delta + P^0\,\Delta\,\Delta)\;\mathfrak{H}(\mathfrak{r},\omega) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{r},\omega). \quad (43)$$

Demnach liefert der asymptotische Ansatz

$$\mathfrak{G}^{\mathfrak{H}} \cong \frac{A}{8\,\pi^2}\,\frac{e^{\pm i L r}}{r}\,\boldsymbol{I} \quad (\omega \gtrless 0): \quad (44)$$

$$P^0\,L^4 - \omega^2(1+P^0)\;L^2 + \omega^2(\omega^2 - 1) = 0\,, \quad (45)$$

d. h. linear in P^0:

$$L^2 \simeq (\omega^2 - 1)\left(1 - \frac{P^0}{\omega^2}\right). \quad (46)$$

Die durch die Anisotropie von 1 abweichende Amplitude $A(\omega)$ findet man, wenn der Ansatz (44) in die Def.-Gl.

$$[P^0\,\Delta\,\Delta + (1+P^0)\;\omega^2\,\Delta + \omega^4 - \omega^2]\;\mathfrak{G}^{\mathfrak{H}}\,(\mathfrak{r},\omega) = \frac{1}{2\,\pi}\,\delta(\mathfrak{r})\;\boldsymbol{I} \quad (47)$$

eingeführt und über eine kleine Kugel um den Koordinatenursprung integriert wird. So ergibt sich (ebenfalls linear in P^0):

$$A(\omega) = [P^0\,L^2 - (1+P^0)\;\omega^2]^{-1} \simeq -\frac{1}{\omega^2}\left(1 - \frac{P^0}{\omega^2}\right). \quad (48)$$

Demnach lautet die gesuchte Greensche Funktion für das Magnetfeld, da das Fernfeld auch hier wieder transversal ist:

$$\mathfrak{G}^{\mathfrak{H}}(\mathfrak{r},\omega) \cong \frac{1}{8\,\pi^2}\,A(\omega)\,\frac{1}{r}\,e^{\pm i L r}\,(\boldsymbol{I} - \mathbf{r}\,\mathbf{r}) \quad (\omega \gtrless 0)\,; \quad (49)$$

aus ihr erhält man $\mathfrak{H}(\mathfrak{r},\omega)$ gemäß Gl. (21). – Für das elektrische Feld gilt Analoges mit

$$\mathfrak{G}^{\mathfrak{E}}\,(\mathfrak{r},\omega) \cong -\frac{|\omega|}{L}\,\mathbf{r} \times \mathfrak{G}^{\mathfrak{H}}\,(\mathfrak{r},\omega) \quad [\text{s. Gl. } (23)].$$

Folglich kann auch die Reduktion des mittleren asymptotischen Strahlungsstroms auf den Korrelationsskalar des Quellterms übernommen werden; man hat, wenn wiederum raum-zeitliche statistische Homogenität vorausgesetzt wird:

$$I(\mathbf{r},\omega) \equiv \pi\,\frac{\omega}{L}\,A^2(\omega)\;R(\mathfrak{L},\omega) \quad (\mathfrak{L} \equiv L\,\mathbf{r}) \quad (50)$$

mit unveränderter Bedeutung von $R(\mathfrak{L},\omega)$. Der gesuchte mittlere Strahlungsstrom im Fernfeld berechnet sich damit nach Gl. (30).

4.2. Quellkorrelation und Zweier-Korrelation der Teilchendichte

Als nächstes ist die Struktur des speziellen Quellterms – s. Gl. (42) – zu berücksichtigen. Unterdrücken wir die Indizes und transformieren wieder nach Fourier, um $\mathfrak{v}(\mathfrak{p})$ und $\boldsymbol{P}(\mathfrak{p})$ durch $n(\mathfrak{p})$ ersetzen zu können $[\mathfrak{p} \equiv (\mathfrak{k},\omega)]$, so ergibt sich

$$\mathfrak{v} = \frac{\omega}{k^2}\,\mathfrak{k}\,n \quad (51)$$

und

$$\boldsymbol{P} = P^0(\boldsymbol{I} + 2\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{k})\;n\,. \quad (52)$$

Mit der Abkürzung

$$a \mathbin{\underset{*}{\cdot}} b \equiv \int a(x) \cdot b(y-x)\;\mathrm{d}x \quad (53)$$

folgt also

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{p}) = -i\,\mathfrak{k} \times \Big\{\omega^2\left(n * \frac{\omega}{k^2}\,\mathfrak{k}\,n\right) + P^0\,\mathfrak{k} \cdot \Big[2\,\mathfrak{k}\,\overline{\left(n * \frac{\omega}{k^2}\,\mathfrak{k}\,n\right)} - \mathfrak{k} \cdot \left(\frac{\omega}{k^2}\,\mathfrak{k}\,n * (\boldsymbol{I} + 2\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{k})\;n\right) - 2\,\overline{\big((\boldsymbol{I} + 2\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{k})\;n \mathbin{\underset{*}{\cdot}} \omega\,n\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}\big)}\Big]\Big\}. \quad (54)$$

Dies ist wiederum bereits transversal, so daß nur der Skalar $\langle \mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{p}') \rangle$ berechnet zu werden braucht. Kürzen wir $\mathfrak{q}(\mathfrak{p}')$ mit $\mathfrak{q}'$ und die rechte Seite von Gl. (54) mit $\mathfrak{q}_0 + P^0 \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{q}_i$ ab, so ist also bei Vernachlässigung der in P^0 quadratischen Terme

$$\langle \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{q}' \rangle = \langle \mathfrak{q}_0 \cdot \mathfrak{q}_0' \rangle + P^0 \sum_{i=1}^{3} [\langle \mathfrak{q}_0 \cdot \mathfrak{q}_i' \rangle + \langle \mathfrak{q}_i \cdot \mathfrak{q}_0' \rangle] \quad (55)$$

auszuführen. Dabei haben die $\mathfrak{q}$ – wenn $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ Tensoren bezeichnen (deren Reihenfolge nicht geändert werden darf!) und die Rechenzeichen weggelassen werden – die Form

$$\mathfrak{q} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\, n * \boldsymbol{C}\, n), \quad (56)$$

so daß gilt:

$$\langle \mathfrak{q}_i \cdot \mathfrak{q}_j' \rangle \equiv R_{ij}(\mathfrak{p})\, \delta(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}') \quad (57)$$
$$= \iint \mathrm{d}\mathfrak{p}''\, \mathrm{d}\mathfrak{p}'''\, \boldsymbol{A}(\mathfrak{p})\, \boldsymbol{B}(\mathfrak{p}'')\, \boldsymbol{C}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}'') \cdot \boldsymbol{D}(\mathfrak{p}')\, \boldsymbol{E}(\mathfrak{p}''')\, \boldsymbol{F}(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}''')\, \langle n(\mathfrak{p}'')\, n(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}'')\, n(\mathfrak{p}''')\, n(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}''') \rangle .$$

Also erhalten wir, wenn wir die Vierer-Korrelation der Teilchendichte wieder gemäß Gl. (A 6) durch deren Zweier-Korrelation approximieren, die statistische Homogenität Gl. (A 7) heranziehen und die Abkürzung $\mathfrak{p}^* \equiv \mathfrak{p} - \mathfrak{p}'$ benutzen:

$$R_{ij}(\mathfrak{p}) = \int \mathrm{d}\mathfrak{p}'\, \boldsymbol{A}(\mathfrak{p})\, \boldsymbol{B}(\mathfrak{p}')\, \boldsymbol{C}(\mathfrak{p}^*) \cdot \boldsymbol{D}(-\mathfrak{p}) [\boldsymbol{E}(-\mathfrak{p}')\, \boldsymbol{F}(-\mathfrak{p}^*) + \boldsymbol{E}(-\mathfrak{p}^*)\, \boldsymbol{F}(-\mathfrak{p}')]\, R_n(\mathfrak{p}')\, R_n(\mathfrak{p}^*) \quad (58)$$

oder mittels der durch die (unveränderte!) Dispersionsbeziehung $\omega^2 = \Omega^2 \equiv 1 + a^2 k^2$ der Plasmawellen ermöglichten Vereinfachung nach Gl. (A 11):

$$R_{ij}(\mathfrak{p}) = \int \mathrm{d}\mathfrak{k}'\, \boldsymbol{A}(\mathfrak{p})\, \boldsymbol{B}(\mathfrak{k}', \Omega')\, \boldsymbol{C}(\mathfrak{k}^*, \Omega^*) \cdot \boldsymbol{D}(-\mathfrak{p})\, [\boldsymbol{E}(-\mathfrak{k}', -\Omega')\, \boldsymbol{F}(-\mathfrak{k}^*, -\Omega^*)$$
$$+ \boldsymbol{E}(-\mathfrak{k}^*, -\Omega^*)\, \boldsymbol{F}(-\mathfrak{k}', -\Omega')]\, R_n(\mathfrak{k}')\, R_n(\mathfrak{k}^*)\, \delta(\omega - \Omega' - \Omega^*) . \quad (59)$$

Dabei ist $\mathfrak{k}^* \equiv \mathfrak{k} - \mathfrak{k}'$, $\Omega' \equiv \Omega(\mathfrak{k}')$ und $\Omega^* \equiv \Omega(\mathfrak{k}^*)$ gesetzt worden.

Mit Gl. (59) lassen sich nun die Beiträge zu $R(\mathfrak{p})$ berechnen. Symmetrisiert man auch hier wie in Gl. (A 12), so ergibt sich bei Beschränkung auf die in P^0 lineare Näherung und Integration über die Fläche $\psi \equiv \Omega' + \Omega^* = \omega$:

$$R(\mathfrak{p}) = \frac{\omega^4}{2} \oint_{\psi=\omega} \frac{\mathrm{d}F'}{\left|\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{k}'}\right|} \left(\frac{\Omega'}{k'^2} - \frac{\Omega^*}{k^{*2}}\right)^2 (\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}')^2 R_n(\mathfrak{k}')\, R_n(\mathfrak{k}^*)$$
$$+ P^0 \omega^2 \oint_{\psi=\omega} \frac{\mathrm{d}F'}{\left|\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{k}'}\right|} (\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}')^2 \left[k^2 \left(\frac{1}{k'^2} - \frac{1}{k^{*2}}\right)^2 + \frac{6}{k'^4 k^{*4}} (k^{*2} - k'^2)(k^2 - 2\,\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}')(k'^2 - \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}')\right] \cdot R_n(\mathfrak{k}')\, R_n(\mathfrak{k}^*) . \quad (60)$$

Der erste Term reproduziert das Ergebnis für isotropen Druck, s. Gl. (32); der zweite gibt also den durch die Druck*an*isotropie bewirkten Beitrag.

4.3. Abstrahlung durch Druckanisotropie; Approximationsformeln

Mit Gl. (60) läßt sich nun sofort die gesuchte, durch die Druckanisotropie verursachte zusätzliche Abstrahlung angeben. Schreiben wir

$$I(\mathfrak{r}, \omega) = I_{\mathrm{is}}(\mathfrak{r}, \omega) + I_{\mathrm{anis}}(\mathfrak{r}, \omega), \quad (61)$$

so ist $I_{\mathrm{is}}(\mathfrak{r}, \omega)$ durch die Gln. (35) oder (36) bekannt, und für $I_{\mathrm{anis}}(\mathfrak{r}, \omega)$ gilt [mit $\vartheta \equiv \sphericalangle(\mathfrak{k}, \mathfrak{r})$]:

$$I_{\mathrm{anis}}(\mathfrak{r}, \omega) = \pi P^0 \frac{l}{\omega} \left[(l^2 - \tfrac{5}{4}) \oint_{\psi=\omega} \frac{\mathrm{d}F}{\left|\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{k}}\right|} k^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^{*2}}\right)^2 R_n(\mathfrak{k})\, R_n(\mathfrak{k}^*) \right.$$
$$\left. + 6\, l^2 \oint_{\psi=\omega} \frac{\mathrm{d}F}{\left|\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{k}}\right|} \frac{1}{k\, k^{*4}} (l - 2\, k \cos \vartheta)^2 (k - l \cos \vartheta)\, R_n(\mathfrak{k})\, R_n(\mathfrak{k}^*) \right] . \quad (62)$$

Unter den Voraussetzungen von Abschnitt 3.3, also

$$a^2 \ll 1 , \qquad 1 \ll k^2 \ll 1/a^2 \qquad \text{und} \qquad a^2 \ll \Delta\omega \equiv \bar{\omega} - 2 \ll 1$$

vereinfacht sich dies zu

$$I_{\text{anis}}(\mathfrak{r}, \omega) \simeq \frac{9}{8} \sqrt{3}\, \pi\, P^0 \frac{\sqrt{\Delta\omega}^3}{a^5} \oint d\mathfrak{k} \sin^2 2\,\vartheta\, u\left(\frac{\sqrt{\Delta\omega}}{a}\, \mathfrak{k}\right) u\left(-\frac{\sqrt{\Delta\omega}}{a}\, \mathfrak{k}\right); \tag{63}$$

speziell im Falle eines isotropen Energiespektrums gilt also

$$I_{\text{anis}}(\mathfrak{r}, \omega) \simeq \frac{12}{5} \sqrt{3}\, \pi^2 P^0 \frac{\sqrt{\Delta\omega}^3}{a^5}\, u^2\left(\frac{\sqrt{\Delta\omega}}{a}\right). \tag{64}$$

Der von der Druckanisotropie herrührende Beitrag ist also von der Größenordnung P^0 oder – in dimensionsbehafteten Größen – $(a/c)^2$, mithin z. B. in der Sonnenkorona i. allg. klein, so daß die Annahme isotropen Drucks dort keinen merklichen Fehler bewirken wird.

Herrn Prof. Dr. G. BURKHARDT und Herrn Prof. Dr. J. JUILFS bin ich für die Bereitstellung eines Arbeitsplatzes, Herrn Prof. Dr. R. W. LARENZ für Anregungen und Kritik sehr zu Dank verpflichtet. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für ein Stipendium während der Fertigstellung der Arbeit.

Anhang

Zur Berechnung von $R(\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{p} \equiv (\mathfrak{k}, \omega)$ beachten wir, daß aus der raum-zeitlichen statistischen Homogenität des Quellterms im Fourier-Raum die Beziehung

$$\langle \mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{p}') \rangle = R(\mathfrak{p})\, \delta(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}') \tag{A 1}$$

folgt. Transformiert man den Quellterm Gl. (20) nach Fourier und führt $\mathfrak{v}^1(\mathfrak{p})$ mittels des ebenfalls nach Fourier transformierten Systems s^1 auf $n^1(\mathfrak{p})$ zurück:

$$\mathfrak{v}^1(\mathfrak{p}) = \frac{\omega}{k^2}\, \mathfrak{k}\, n^1(\mathfrak{p}), \tag{A 2}$$

so ergibt sich [der Index 1 an $n^1(\mathfrak{p})$ sei im folgenden unterdrückt]:

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{p}) = i \int d\mathfrak{p}' \frac{\omega'}{k'^2} (\mathfrak{k}' \times \mathfrak{k})\, n(\mathfrak{p}')\, n(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}'). \tag{A 3}$$

Dies ist schon transversal, so daß

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{p}) = (\boldsymbol{I} - \mathfrak{k}\,\mathfrak{k}) \cdot \mathfrak{Q}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{p}) \tag{A 4}$$

gilt, womit folgt

$$\langle \mathfrak{q}(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{q}(\mathfrak{p}') \rangle = - \iint d\mathfrak{p}''\, d\mathfrak{p}''' \frac{\omega''}{k''^2} \frac{\omega'''}{k'''^2} (\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}'') \cdot (\mathfrak{k}' \times \mathfrak{k}''') \langle n(\mathfrak{p}'')\, n(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}'')\, n(\mathfrak{p}''')\, n(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}''') \rangle. \tag{A 5}$$

Darin tritt nun die Vierer-Korrelation der Teilchendichte auf: Sie soll im folgenden durch eine Summe von Produkten der Zweier-Korrelationen approximiert werden. Zur Abstrahlung bei etwa der doppelten Plasmafrequenz trägt dann nur der Ausdruck

$$\begin{aligned} &\langle n(\mathfrak{p}'')\, n(\mathfrak{p}''') \rangle \langle n(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}'')\, n(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}''') \rangle + \langle n(\mathfrak{p}'')\, n(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}''') \rangle \langle n(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}'')\, n(\mathfrak{p}''') \rangle \\ &= R_n(\mathfrak{p}'')\, R_n(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}'')\, \delta(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}')\, [\delta(\mathfrak{p}'' + \mathfrak{p}''') + \delta(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}''' - \mathfrak{p}'')] \end{aligned} \tag{A 6}$$

bei, worin $R_n(\mathfrak{p})$ durch die Beziehung

$$\langle n(\mathfrak{p})\, n(\mathfrak{p}') \rangle = R_n(\mathfrak{p})\, \delta(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}') \tag{A 7}$$

definiert ist. Damit erhält man

$$R(\mathfrak{p}) = \int d\mathfrak{p}' \frac{\omega'}{k'^2} \left(\frac{\omega'}{k'^2} + \frac{\omega' - \omega}{|\mathfrak{k}' - \mathfrak{k}|^2} \right) (\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}')^2\, R_n(\mathfrak{p}')\, R_n(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}') \quad (\omega > 1). \tag{A 8}$$

Mittels der genannten Näherung ist der Korrelationsskalar des Quellterms also auf die Zweier-Korrelation der Teilchendichte zurückgeführt. Wie gut diese Näherung ist, kann ohne Kenntnis der statistischen Eigenschaften des Anfachungsmechanismus nicht entschieden werden; sie erlaubt aber, den mittleren Strahlungsstrom im Fernfeld durch das Energiespektrum der Elektronenwellen auszudrücken (s. 3.2).

Gl. (A 8) läßt sich noch vereinfachen, wenn wir die Dispersionsbeziehung der Plasmaschwingungen ausnutzen: Die Auflösung des Fourier-transformierten Systems s[1] nach $n(\mathfrak{p})$ liefert

$$n(\mathfrak{p}) = n(\mathfrak{k})\,\delta(\omega-\Omega) + n^*(-\mathfrak{k})\,\delta(\omega+\Omega) \qquad \text{mit} \quad \Omega^2 \equiv 1 + a^2 k^2, \tag{A 9, 10}$$

und damit ergibt sich aus Gl. (A 7):

$$R_n(\mathfrak{p}) = R_n(\mathfrak{k})\,\delta(\omega-\Omega) + R_n(-\mathfrak{k})\,\delta(\omega+\Omega) \tag{A 11}$$

mit reellem, nicht negativem $\qquad R_n(\mathfrak{k}) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\omega\, R_n(\mathfrak{p})\,.$

Davon braucht in $R_n(\mathfrak{p}')\,R_n(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}')$ im Bereich $\omega > 1$ nur der Term

$$R_n(\mathfrak{k}')\,R_n(\mathfrak{k}^*)\,\delta(\omega'-\Omega')\,\delta(\omega-\Omega'-\Omega^*) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{k}^* \equiv \mathfrak{k}-\mathfrak{k}', \quad \Omega' \equiv \Omega(\mathfrak{k}'), \quad \Omega^* \equiv \Omega(\mathfrak{k}^*)$$

mitgeführt zu werden, so daß man (nach Symmetrisierung) erhält:

$$R(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathfrak{k}' \left(\frac{\Omega'}{k'^2} - \frac{\Omega^*}{k^{*2}}\right)^2 (\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}')^2\, R_n(\mathfrak{k}')\, R_n(\mathfrak{k}^*)\, \delta(\omega-\Omega'-\Omega^*)\,. \tag{A 12}$$

Darin kann wegen der δ-Funktion statt über den $\mathfrak{k}'$-Raum auch über die Fläche $\psi \equiv \Omega' + \Omega^* = \omega$ integriert werden, also:

$$R(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\psi=\omega} \frac{\mathrm{d}F'}{\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{k}'}\right|} \left(\frac{\Omega'}{k'^2} - \frac{\Omega^*}{k^{*2}}\right)^2 (\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}')^2\, R_n(\mathfrak{k}')\, R_n(\mathfrak{k}^*)\,. \tag{A 13}$$